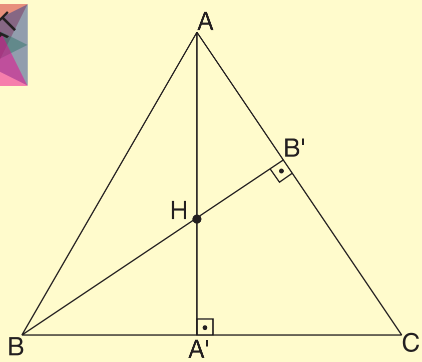
TEOREM : Üçgenin yükseklikleri aynı noktada kesişir.

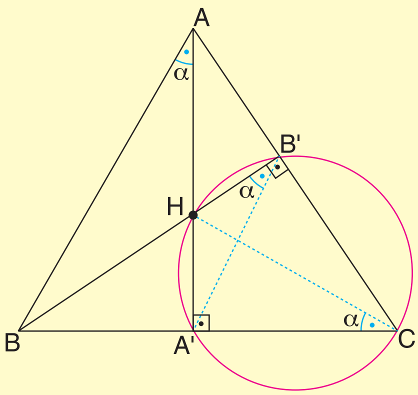
İSPAT



1. ADIM

$m(\widehat{HB'C}) + m(\widehat{HA'C}) = 180°$ olduğundan, HA'CB' dörtgeni bir kirişler dörtgenidir.

Sonuç olarak, H, A', C ve B' noktaları aynı çemberin üzerindedir.

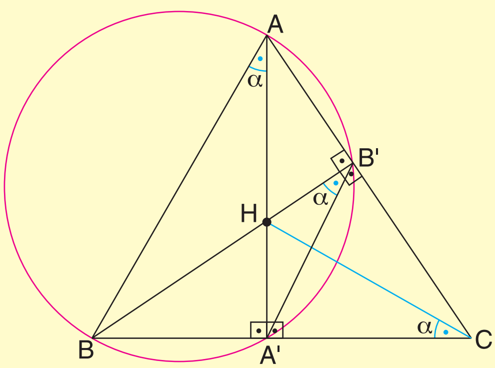


2. ADIM

[HC] ile [A'B'] yü çizelim.

Aynı yayı gören çevre açıların ölçüleri eşit olduğundan,

$m(\widehat{HCA'}) = \alpha$ dersek $m(\widehat{HB'A'}) = \alpha$ olur.



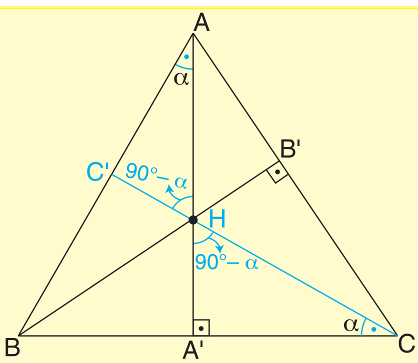
3. ADIM

$m(\widehat{AB'B}) = m(\widehat{AA'B})$ olduğundan, AB'A'B dörtgeni bir kirişler dörtgenidir.

Sonuç olarak, A, B', A' ve B noktaları aynı çemberin üzerindedir.

Aynı yayı gören çevre açıların ölçüleri eşit olduğundan,

$m(\widehat{BAA'}) = m(\widehat{BB'A'}) = \alpha$ dır.



4. ADIM

$CH \cap [AB] = \{C'\}$ olsun.

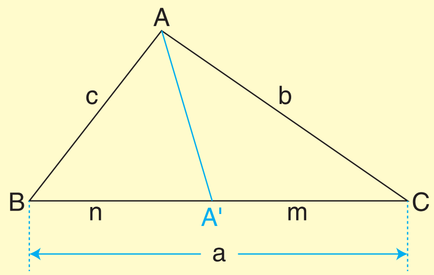
$m(\widehat{A'HC}) = 90° - \alpha$ dır. İç ters açı özelliğinden,

$m(\widehat{AHC'}) = m(\widehat{A'HC}) = 90° - \alpha$ olur.

FİNAL : AHC' üçgeninin iç açılarının ölçüleri toplamı 180° dir.

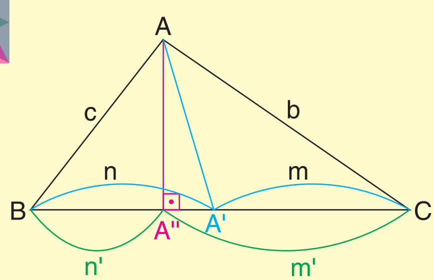
$m(\widehat{HC'A}) = 180° - (\alpha + 90° - \alpha) = 90°$ olduğundan, $CH \perp [AB]$ dir. ■

LEMMA 1:



$b^2 - c^2 = m^2 - n^2 \Leftrightarrow AA' \perp BC$ dir.

İSPAT



A nın BC üzerindeki dik izdüşümü A'' olsun.

$|BA''| = n'$ ve $|CA''| = m'$ olsun.

A'' noktasının B ve A' arasında olduğu varsayalım.

$b^2 - c^2 = (m')^2 - (n')^2 \longrightarrow$ Pisagor'dan
$b^2 - c^2 = m^2 - n^2 \longrightarrow$ Verilen

Üsteki eşitliklerden,

$$(m')^2 - (n')^2 = m^2 - n^2$$

$$(m')^2 - m^2 = (n')^2 - n^2$$

kolayca elde edilir.

A'' noktasının B ve A' arasında olduğunu varsaydığımız için, bu varsayım gereği

$0 < n' < n$ ve $0 < m < m'$ olacağı açıktır.

$$(m')^2 - m^2 = (n')^2 - n^2 \Rightarrow \underbrace{(m' - m)}_{\text{Pozitif}} \cdot \underbrace{(m' + m)}_{\text{Pozitif}} = \underbrace{(n' - n)}_{\text{Negatif}} \cdot \underbrace{(n' + n)}_{\text{Pozitif}}$$

Pozitif bir sayı, negatif bir sayıya eşit olamayacağından varsayımımız yanlıştır.

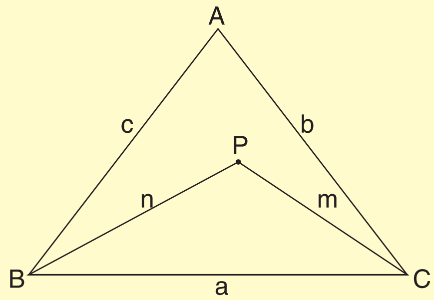
Şimdi de A'' noktasının A' ve C arasında olduğu varsayalım.

İlk varsayımımızdaki işlemler benzer olarak yapıldığında, bu varsayımın da yanlış olduğu görülür.

Her iki varsayım da yanlış olduğu için, A'' noktası A' noktasının ne solunda ne de sağındadır.

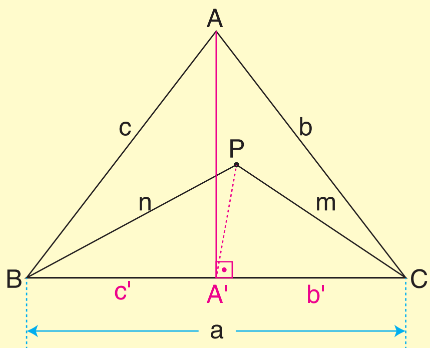
Sonuç olarak, A' ile A'' çakışıktır. ■

LEMMA 2:



P noktası $\widehat{ABC}$ nin iç bölgesinde olmak koşuluyla,

$c^2 - b^2 = n^2 - m^2 \Leftrightarrow AP \perp BC$ dir.



A nın BC üzerindeki dik izdüşümü A' olsun.

$|BA'| = c'$ ve $|CA'| = b'$ olsun.

$c^2 - b^2 = (c')^2 - (b')^2 \longrightarrow$ Pisagor'dan

$c^2 - b^2 = n^2 - m^2 \longrightarrow$ Verilen

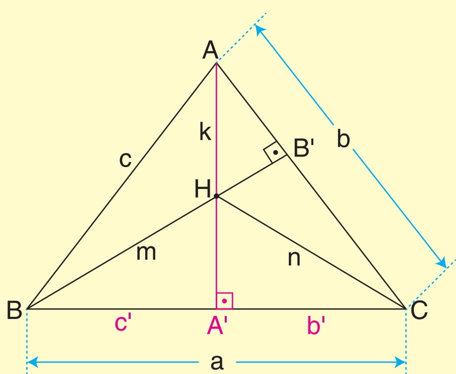
Üsteki eşitliklerden, $n^2 - m^2 = (c')^2 - (b')^2$ ....($\star$) kolayca elde edilir.

[PA'] doğru parçasını çizelim.

($\star$) eşitliği ve Lemma 1'den $PA' \perp BC$ olur.

$AA' \perp BC$ ve $PA' \perp BC$ olduğundan, A, P ve A' noktaları doğrusaldır. Dolayısıyla, $AP \perp BC$ dir. ■

TEOREM : **Bir üçgenin yükseklikleri aynı noktada kesişir.**



$$\begin{aligned} & c^2 - b^2 = m^2 - n^2 \text{ .... Lemma 2'den} \\ + \; & a^2 - c^2 = n^2 - k^2 \text{ .... Lemma 2'den} \\ \hline & a^2 - b^2 = m^2 - k^2 \text{ .... } (\star) \end{aligned}$$

($\star$) eşitliği ve Lemma 2'den $CH \perp AB$ dir. ■

TEOREM : **Bir üçgenin yükseklikleri aynı noktada kesişir.**

İSPAT (Vektörel)

A, B ve C doğrusal olmayan üç nokta olmak üzere, A nın BC üzerindeki dik izdüşümü A', B nin AC üzerindeki dik izdüşümü B' ve $AA' \cap BB' = \{H\}$ olsun. $CH \perp AB$ olduğunu göstermek istiyoruz. Dik iki vektörün iç çarpımı sıfır olduğundan $\langle \overrightarrow{CH}, \overrightarrow{AB} \rangle = 0$ olduğunu gösterirsek ispat tamamdır.

1

$$\langle \overrightarrow{BH}, \overrightarrow{AC} \rangle = 0 \Rightarrow \langle \vec{H} - \vec{B}, \vec{C} - \vec{A} \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle \vec{H}, \vec{C} \rangle - \langle \vec{H}, \vec{A} \rangle - \langle \vec{B}, \vec{C} \rangle + \langle \vec{B}, \vec{A} \rangle = 0}$$

2

$$\langle \overrightarrow{AH}, \overrightarrow{CB} \rangle = 0 \Rightarrow \langle \vec{H} - \vec{A}, \vec{B} - \vec{C} \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle \vec{H}, \vec{B} \rangle - \langle \vec{H}, \vec{C} \rangle - \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle + \langle \vec{A}, \vec{C} \rangle = 0}$$

$\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \langle \vec{B}, \vec{A} \rangle$ olduğunu göz önüne alarak bu iki eşitliği taraf tarafa toplayalım.

$$\langle \vec{H}, \vec{B} \rangle - \langle \vec{H}, \vec{A} \rangle - \langle \vec{B}, \vec{C} \rangle + \langle \vec{A}, \vec{C} \rangle = 0$$

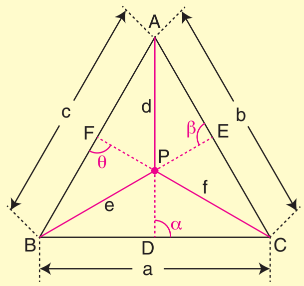
$$\Rightarrow \left(\langle \vec{H}, \vec{B} \rangle - \langle \vec{H}, \vec{A} \rangle \right) - \left(\langle \vec{B}, \vec{C} \rangle - \langle \vec{A}, \vec{C} \rangle \right) = 0$$

$$\Rightarrow \langle \vec{H}, \vec{B} - \vec{A} \rangle - \langle \vec{B} - \vec{A}, \vec{C} \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle \vec{H}, \vec{B} - \vec{A} \rangle - \langle \vec{C}, \vec{B} - \vec{A} \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle \vec{H} - \vec{C}, \vec{B} - \vec{A} \rangle = 0 \Rightarrow \langle \overrightarrow{CH}, \overrightarrow{AB} \rangle = 0 \quad \blacksquare$$

THEOREM : **CERAN**



P: Any point inside $\widehat{ABC}$

$AP \cap BC = \{D\}$
$CP \cap AB = \{F\}$
$BP \cap AC = \{E\}$

Theorem (CERAN)

$$a \cdot d \cdot \cos\alpha + b \cdot e \cdot \cos\beta + c \cdot f \cdot \cos\theta = 0$$

CERAN'S DOT PRODUCT

$$\langle \overrightarrow{BP}, \overrightarrow{AC} \rangle + \langle \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{CB} \rangle + \langle \overrightarrow{CP}, \overrightarrow{BA} \rangle = 0$$

Finally, by using Ceran's Dot Product we can easily prove that, the heights of o a triangle intersects at the same point (orthocenter.) ■

07.09.2017
ALPASLAN
CERAN

CERAN MATEMATİK